Cadre : On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace probabilisable.

I Variables aléatoires discrètes, généralités

1) Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 1. (i) Une fonction mesurable $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ est appelée variable aléatoire.
(ii) On note $\mathbb{P}_X$ la mesure image de $\mathbb{P}$ par X, que l'on appelle loi de X.
(iii) Si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, X est dite réelle.
(iv) Si $X(\Omega)$ est dénombrable presque sûrement, X est dite discrète.

Exemple 2. *(i) Résultat du lancer d'une pièce :* $E = \{P, F\}$.
(ii) Couleur d'une boule tirée dans une urne : $E = \{\mathit{couleurs}\}$.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.

Proposition 3. *Soient I au plus dénombrable et $E' = (e_i)_{i\in I} \subset E$ tel que $X(\Omega) \subset E'$. Alors $\mathbb{P}_X$ est caractérisée par $(p_i)_{i\in I}$, où $p_i = \mathbb{P}(X = e_i)$ avec $\sum_{i\in I} p_i = 1$ et $\mathbb{P}_X = \sum_{i\in I} p_i \delta_{e_i}$.*

Remarque 4. *Réciproquement, si $f : E' \to [0,1]$ est telle que $\sum_{i\in I} f(e_i) = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(E, \mathcal{E})$ telle que $\mathbb{P}(e_i) = f(e_i)$. Une variable aléatoire suivant cette loi est alors discrète.*

2) Lois discrètes usuelles

Les variables aléatoires discrètes les plus classiques sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. On trouvera en annexe les propriétés de ces lois.

Application 5 (Modélisation par des variables aléatoires discrètes)**.**
(i) On lance une pièce équilibrée et on note $X = 1$ si le résultat est "face", 0 sinon. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
(ii) Si on lance n fois la pièce de manière indépendante, le nombre X de succès suit $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
(iii) Le résultat du jet d'un dé à 6 faces équilibré suit $\mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.
(iv) Soit ℓ le nombre moyen de personnes se présentant à un guichet chaque minute. Le nombre de personnes se présentant pendant N minutes peut se modéliser par $\mathcal{P}(N\ell)$.
(v) On lance une pièce équilibrée et on note X le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir "face". Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

3) Espérance, variance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes.

Définition 6. Lorsque cela a un sens, on définit :
(i) L'espérance de X : $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\mathbb{P}(X = x)$
(ii) La covariance de X et Y : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$
(iii) La variance de X : $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$

Proposition 7. Cov *est une forme bilinéaire symétrique positive, et on a* $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ *et* $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$.

Proposition 8. *Si X et Y sont indépendantes, alors* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, *et* $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

4) Indépendance

Définition 9. Soient I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ des variables aléatoires à valeurs dans $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Les X_i sont indépendantes si, pour tout $J \subset I$ fini :

$$\forall (A_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} \mathcal{E}_i,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} X_i \in A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Proposition 10. *Soient I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ des variables aléatoires à valeurs dans $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Soient $(E'_i)_{i\in I}$ dénombrables tels que $X_i \in E'_i$ presque sûrement. Les $(X_i)_{i\in I}$ sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $J \subset I$ fini, on a :*

$$\forall (e_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} E'_i,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} \{X_i = e_i\}\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(X_i = e_i)$$

Exemple 11. *Soient X et Y les résultats de deux lancers indépendants d'un dé à 6 faces équilibré. Soit $Z = \mathbb{1}_{\{X+Y \text{ est pair}\}}$. Alors (X, Y), (X, Z) et (Y, Z) sont indépendantes, mais pas (X, Y, Z).*

Proposition 12. *Soient X et Y réelles discrètes indépendantes. Alors :*

$$\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y \quad \text{où} \quad \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y(z) = \sum_{x+y=z} \mathbb{P}_X(x)\mathbb{P}_Y(y)$$

Application 13 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$)**.** *Soit (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_k = e_i) = \mathbb{P}(X_k = -e_i) = \frac{1}{2d}$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_i$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 1$ si $d \leqslant 2$ et $\mathbb{P}(|S_n| \to \infty) = 1$ si $d > 2$.*

II Caractérisation des lois discrètes

1) Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

Définition 14. On définit la fonction de répartition F_X de X par :

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

Exemple 15. *Fonctions de répartition des lois classiques (cf Annexe).*

Proposition 16. *(i) F_X est croissante, continue à droite, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.*

(ii) Réciproquement, toute fonction satisfaisant le point précédent est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Proposition 17. *F_X caractérise $\mathbb{P}_X$.*

Remarque 18. *On peut généraliser la fonction de répartition pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Le résultat reste valable.*

2) Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E = \mathbb{N}$.

Définition 19. On définit la fonction génératrice G_X de X par :

$$G_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \mathbb{E}\left[s^X\right] \end{array} \right.$$

Remarque 20. *Le rayon de convergence de cette série est au moins égal à 1 et $G_X(1) = 1$.*

Exemple 21. *Fonctions génératrices des lois classiques (cf Annexe).*

Proposition 22. *G_X caractérise $\mathbb{P}_X$. En particulier $\mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.*

Proposition 23. *$\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$ si, et seulement si, G_X est p fois dérivable et dans ce cas $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-p+1)]$.*

Application 24. $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$ *et* $\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

Proposition 25. *Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.*

Application 26. *On ne peut pas truquer deux dés de sorte que leur somme suivent une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.*

Corollaire 27. *Soient $\lambda, \mu > 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ indépendants. Alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.*

Théorème 28 (Galton-Watson)**.** *Soient $(X_i^j)_{i,j \in \mathbb{N}^\star}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note μ leur loi et m leur espérance. On définit le processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note $\pi_\infty = \mathbb{P}(\exists\, n \in \mathbb{N},\ Z_n = 0)$. Alors si $\mu \neq \delta_1$, on a :*

(i) Si $m \leqslant 1$, alors $\pi_\infty = 1$: Il y a extinction presque sûre du processus.

(ii) Si $m > 1$, alors $\pi_\infty < 1$: Il y a une probabilité non nulle de survie.

3) Fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 29. On définit la fonction caractéristique φ_X de X par :

$$\varphi_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, X\rangle}\right] \end{array} \right.$$

Exemple 30. *Fonctions caractéristiques des lois classiques (cf Annexe).*

Proposition 31. *φ_X caractérise $\mathbb{P}_X$.*

Proposition 32. *Si X est réelle et $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$, alors φ_X est p fois dérivable et $\varphi_X^{(p)}(\lambda) = i^p \mathbb{E}\left[X^p e^{i\lambda X}\right]$. En particulier, $\varphi_X^{(p)}(0) = i^p \mathbb{E}[X^p]$.*

Remarque 33. *Réciproquement, si p est pair et φ_X p fois dérivable en 0, alors $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$. On peut construire X n'admettant pas d'espérance, mais telle que φ_X est dérivable en 0 (admis).*

III Convergence en loi

Définition 34. On dit que (X_n) converge en loi vers X si, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\lim_n \mathbb{E}[\varphi(X_n)] = \mathbb{E}[\varphi(X)]$. On note alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Exemple 35. *Si* $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{p}{n}\right)$ *avec* $p > 0$*, alors* $\frac{1}{n} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(p)$.

Théorème 36 (Lévy)**.** $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ *si et seulement si* $\varphi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X$.

Proposition 37. $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ *si, et seulement si, pour tout* $x \in E$, $\mathbb{P}(X_n = E) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$.

Proposition 38. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *si, et seulement si,* $F_{X_n} \to F_X$ *en tout point de continuité de* F_X.

Théorème 39 (Théorème central limite)**.** *On suppose que les* X_n *sont indépendants, identiquement distribués et de carré intégrable. Alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}} \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \quad \mathcal{N}(0,1)$$

Application 40. *On suppose que les* X_n *sont indépendants, identiquement distribués et de loi* $\mathcal{B}(p)$ *pour* $p \in [0,1]$ *inconnu. Le théorème central limite donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau* α *pour* p *en fonction de la moyenne empirique* $\widehat{p_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i$*. Il s'agit de :*

$$IC_\alpha = \left[\widehat{p_n} \pm \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right]$$

où q_t *est le quantile d'ordre* t *de* $\mathcal{N}(0,1)$.

Application 41 (Monte-Carlo)**.** *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et de loi* $\mathcal{U}([0,1])$*. Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)dt \ p.s.$$

Théorème 42. *Soit* $(X_{n,j})_{n\in\mathbb{N}^\star, j\in[\![1,M_n]\!]}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans* $\{0,1\}$*, avec* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite croissante de* $\mathbb{N}^\star$ *qui tend vers* $+\infty$*. On pose* $\mathbb{P}(X_{n,j} = 1) = p_{n,j}$ *et* $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} X_{n,j}$*. On suppose de plus que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} = \lambda > 0$$

Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *converge en loi vers la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$.

Développements

- Processus de Galton-Watson (28) [App13]
- Loi des évènements rares de Poisson (42) [Ouv09]

Références

[BL07] P. Barbe et M. Ledoux. *Probabilité.* EDP Sciences
[Ouv08] J.-Y. Ouvrard. *Probabilités : Tome 1.* Cassini
[Ouv09] J.-Y. Ouvrard. *Probabilités : Tome 2.* Cassini
[App13] W. Appel. *Probabilités pour les non probabilistes.* H&K

Annexes

Nom	Paramètres	Notation	$\mathbb{P}_X$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{Var}(X)$	$\varphi_X(t)$	$G_X(t)$
Uniforme	$n \in \mathbb{N}^\star$	$\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\delta_k$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$	$\dfrac{1}{n}\dfrac{t-t^{n+1}}{1-t}\ (t \neq 1)$
Bernoulli	$p \in [0,1]$	$\mathcal{B}(p)$	$p\delta_1 + (1-p)\delta_0$	p	$p(1-p)$	$pe^{it} + (1-p)$	$1-p+pt$
Binomiale	$n \in \mathbb{N}^\star, p \in [0,1]$	$\mathcal{B}(n,p)$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\delta_k$	np	$np(1-p)$	$pe^{it} + (1-p)^n$	$(1-p+pt)^n$
Géométrique	$q \in [0,1]$	$\mathcal{G}(q)$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q(1-q)^{k-1}\delta_k$	$\dfrac{1}{q}$	$\dfrac{1-q}{q^2}$	$\dfrac{qe^{it}}{1-(1-q)e^{it}}$	$\dfrac{(1-q)t}{1-qt}$
Poisson	$\lambda > 0$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\delta_k$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$e^{(\lambda-1)t}$

FIGURE 1 – Lois de probabilités discrètes